Devoir Surveillé n°5
Mercredi 8 Janvier 2025
3 heures

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies numpy, numpy.random et matplotlib.pyplot de Python sont importées avec les commandes respectives import numpy as np, import numpy.random as rd et import matplotlib.pyplot as plt.

Exercice 1 – EDHEC 2024

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2}\,dx$ et on a en particulier $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4 - x^2}\,dx$.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que : $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4 - x^2} = \frac{a}{2 - x} + \frac{b}{2 + x}$

b) En déduire que $u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. a) Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

b) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de suite(n).

```
def suite (n) :
    if (−1)**n == 1 :
        u = np.log(3)/4
        for k in range (2, n+1, 2) :
            u = 4 * u − . . .
    else :
        u = np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range (3, n+1, 2) :
            u = 4*u − . . .
    return u
```

4. a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n + 1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n + 1)}$$

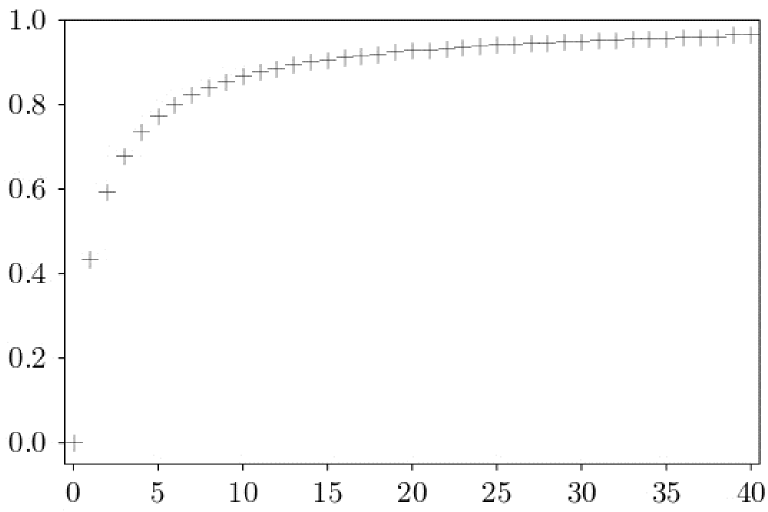
b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. a) On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x = np.arange (0, 41)
u = [ ]              # liste vide
for n in range (41) :
        u.append (3*n*suite (n) )
plt.plot(x, u, '+')
plt.show( )
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

❶ $u_n \sim_{+\infty} 3n$ ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$ ❸ $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{3n}$ ❹ $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}.$

b) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

c) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0$$

d) Vérifier la conjecture établie à la question 5a).

Exercice 2 - EML 2013

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne U contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne U.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout i $\in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.
1. Soit i $\in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Soit (i, j) $\in [\![1, n]\!]^2$ tel que i $\neq$ j.
a) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
b) Déterminer sans calcul le signe de cov(X_i, X_j).
c) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
d) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Exercice 3 – ESC 2009

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est p $\in$]0;1[et de (n + 1) urnes numérotées de 0 à n.
Pour k $\in [\![0, n]\!]$, l'urne n° k contient k boules vertes et (n – k) boules rouges.
On considère l'expérience E suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n° 4.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.
1) a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
On précisera en particulier X(Ω) et P(X = k) pour tout k de X(Ω).
Donner l'espérance E(X) et la variance V(X).
b) En déduire la valeur de $E(X^2)$.
2) a) Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$ et $P_{(X=n)}(Y = 0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Pour tout k $\in$ {0, … ,n}, déterminer $P_{(X=k)}(Y = 1)$.
c) En déduire que : $P(Y = 1) = \dfrac{E(X)}{n}$
d) Donner la loi de Y et son espérance.
3) a) Sans calcul, déterminer le signe de la covariance du couple (X, Y).
b) Montrer que $E(XY) = \sum_{k=0}^{n} k.P(X = k \cap Y = 1) = \dfrac{E(X^2)}{n}$
c) En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
4) Ecrire une fonction Python d'en-tête `def lois_XetY(n, p)`, qui, à un entier n et un réel p associe une simulation du couple (X, Y).

Exercice 4 – EML 2010

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération » .
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min (X_1, X_2) + X_3) > \max (X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.
1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$.
On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
a) Justifier : $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$
b) En déduire : $P(\Delta = n) = \dfrac{2pq^n}{1 + q}$
4. a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
b) Monter : $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. a) En déduire : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$
b) Exprimer P(A) à l'aide de p et q.