Chapitre 1 : Comparaison de suites, de fonctions

1. Comparaison de suites

1.1 Suites équivalentes / Suite négligeable

Rappels : **Croissances comparées**

Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)^{\alpha}}{n^{\beta}} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^{\beta}} = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{q^{n}}{n^{\beta}} = +\infty$$

Introduction :

Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = n - \ln(n)$.

Si on cherche la limite de (u_n), on remarque qu'il s'agit d'une forme indéterminée.

En écrivant : $u_n = n\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ et en utilisant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissance comparée),

on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

En quelque sorte "n" l'emporte sur "ln(n)".

Nous allons définir mathématiquement cette notion.

Définitions :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

_ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, on dit que **$(u_n)$ et (v_n) sont équivalentes**.

On note alors : $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

_ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, on dit que **$(u_n)$ est négligeable devant (v_n)** (ou que (v_n) est prépondérante devant (u_n)).

On note alors : $u_n =_{+\infty} o(v_n)$. ("u_n est un petit o de v_n")

Exemples :

_ $u_n = -2n + 3$, $v_n = n^2$

$\dfrac{u_n}{v_n} = -\dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Donc $-2n + 3 = o(n^2)$

_ $u_n = n^2 - n$ $v_n = n^2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$ donc $n^2 - n \sim_{+\infty} n^2$

Remarque : Soit (u_n), (v_n) et (w_n) 3 suites.

_ si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n \sim_{+\infty} w_n$ alors $u_n \sim_{+\infty} w_n$

_ si $u_n =_{+\infty} o(v_n)$ et $v_n =_{+\infty} o(w_n)$ alors $u_n =_{+\infty} o(w_n)$

_ si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ et $v_n =_{+\infty} o(w_n)$ alors $u_n =_{+\infty} o(w_n)$

1.2 Limites et comparaisons

Propriété :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

1) si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L \neq 0 \end{cases}$ alors $u_n =_{+\infty} o(v_n)$

2) si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \infty \end{cases}$ alors $u_n =_{+\infty} o(v_n)$

3) si $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L \\ L \in \mathbb{R} \text{ et } \neq 0 \end{cases}$ alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Démonstration : évidente d'après les opérations sur les limites

Ex : Comparaison de $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = 1$ et $w_n = n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\frac{1}{n} =_{+\infty} o(1)$ $1 =_{+\infty} o(n)$

Attention, deux suites qui tendent vers 0 ne sont pas forcément équivalentes :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes !

Propriété fondamentale :

Soient u et v deux suites.
Si $\mathbf{u_n \sim_{+\infty} v_n}$ et si $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L}$ **(fini ou infini)**, alors $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L}$.

Pour déterminer la limite d'une suite, on peut donc chercher un équivalent plus simple.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - n$

$n^2 - n \sim_{+\infty} n^2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - n = +\infty$

1.3 Exemples classiques

Propriété : **Croissances comparées**

Soit α, β, a et b des réels strictement positifs.
1) si $\boldsymbol{\alpha < \beta}$, $\boldsymbol{n^\alpha =_{+\infty} o(n^\beta)}$
2) $\boldsymbol{\ln^\alpha(n) =_{+\infty} o(n^\beta)}$.
3) $\forall$ $\boldsymbol{a > 1}$, $\boldsymbol{n^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta n})}$, $\boldsymbol{n^\alpha =_{+\infty} o(a^n)}$
4) si $\boldsymbol{a < b}$, $\boldsymbol{a^n =_{+\infty} o(b^n)}$

(On peut retenir : « une exponentielle (ou une puissance) l'emporte sur n^α, qui l'emporte sur un logarithme »)

Exemples :
$\ln(n) = o(\sqrt{n})$, $\sqrt{n} = o(n)$, $n = o(n^2)$, $n^2 = o(2^n)$,$2^n = o(e^n)$, …

Propriété :

Un **polynôme** en n est équivalent à son **monôme non nul de plus haut degré**.

Exemple :
$\lim\limits_{n \to +\infty} -2n^2 + 3n + 5$?

$-2n^2 + 3n + 5 \sim_{+\infty} -2n^2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n^2 + 3n + 5 = -\infty$

Attention : Les expressions contenant a^n, $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n, n !…. ne sont pas des polynômes en n !

Propriété :

Soit (u_n) une suite. Si $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$ alors :

$\boldsymbol{\ln(1 + u_n) \sim_{+\infty} u_n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{u_n} - 1 \sim_{+\infty} u_n}$

Démonstration : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(1+v_n)}{v_n} = 1$ donc $\ln(1 + v_n) \sim_{+\infty} v_n$.
De même pour $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Exemple : Equivalent simple de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$? $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2}$

Remarque : Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. Alors en écrivant $\boldsymbol{\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1))}$, on se ramène au cas ci-dessus.

Ex : Equivalent simple de $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3}\right)$? $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3} = \dfrac{\sqrt{n} \times 1}{\sqrt{n} \times \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}}$ tend vers 1

$\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3} = 1 + \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3} - 1\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{n} - (\sqrt{n}-3)}{\sqrt{n}-3} = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{n}-3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}-3} = 0$ donc $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-3}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}-3}$

1.4 Opérations sur les équivalents

Remarque : Soit (u_n) et (v_n) deux suites et λ un réel non nul.
_ Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n =_{+\infty} o(v_n)$ et $u_n =_{+\infty} o(\lambda v_n)$
_ Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\lambda u_n \sim_{+\infty} \lambda v_n$.

Propriété fondamentale : **Equivalent d'une somme**

Soit u, v, w sont trois suites.
Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{u_n = v_n + w_n} \\ \mathbf{w_n =_{+\infty} o(v_n)} \end{cases}$ alors $\mathbf{u_n \sim_{+\infty} v_n}$

"Une somme est équivalente à son terme prépondérant"

Remarque :
Autrement dit, si $u_n =_{+\infty} v_n + o(v_n)$, alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$

Exemple : Equivalent de $3n - 2\ln(n)$:

$\ln(n) =_{+\infty} o(n)$ donc $3n - 2\ln(n) \sim_{+\infty} 3n$

Remarque : Attention, cette propriété est fausse pour un produit !
Par exemple : $n.\ln(n)$ n'est pas équivalent à n !

Propriété : **Equivalents et produits, quotients, puissances**

Soient u, v, w, z des suites et α un réel.
_ Si $\mathbf{u_n \sim_{+\infty} v_n}$ alors $\mathbf{u_n w_n \sim_{+\infty} v_n w_n}$
_ Si $\mathbf{u_n \sim_{+\infty} v_n}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\mathbf{u_n^{\alpha} \sim_{+\infty} v_n^{\alpha}}$
_ Si $\mathbf{u_n \sim_{+\infty} v_n}$ et $\mathbf{w_n \sim_{+\infty} z_n}$ alors $\begin{cases} \mathbf{u_n w_n \sim_{+\infty} v_n z_n} \\ \text{si } w_n \text{ et } z_n \text{ ne s'annulent pas } \mathbf{\dfrac{u_n}{w_n} \sim_{+\infty} \dfrac{v_n}{z_n}} \end{cases}$

Remarque : Attention, ne pas utiliser des règles qui n'existent pas !
$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow u_n + w_n \sim_{+\infty} v_n + w_n$: Non
$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim_{+\infty} \ln(v_n)$: Non
$u_n \sim_{+\infty} v_n \Rightarrow e^{un} \sim_{+\infty} e^{vn}$: Non

Exemple :
Equivalent puis limite de $u_n = \dfrac{(n^2 + 2n - 3)(e^{1/n} - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}}$:

$n^2 + 2n - 3 \sim n^2$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

$n^2 + 1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2 + 1} \sim \sqrt{n^2} \sim n$ $\quad$ Donc $u_n \sim \dfrac{n^2 \times \dfrac{1}{n}}{n} \sim 1$ $\quad$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

1.5 Encadrements et équivalents

A l'aide d'un encadrement du type $u_n \leq v_n \leq w_n$, on peut souvent trouver un équivalent de v_n, en faisant apparaitre un quotient qui tend vers 1 :

Méthode :

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $u_n > 0$, l'encadrement devient : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq \frac{w_n}{u_n}$.

Si de plus $\lim_{n \to +\infty} \frac{w_n}{u_n} = 1$, alors par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. Donc $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

Ex : Soit (v_n) une suite telle que $\forall n \geq 1, n \leq v_n \leq n + \frac{1}{n}$. Déterminer un équivalent simple de (v_n)

Alors $\forall n \geq 1, 1 \leq \frac{v_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n^2}$. $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$, donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n} = 1$.

Donc $v_n \sim_{+\infty} n$.

1.6 Cas particulier de $u_n^{v_n}$

Rappel :

$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b\ln(a)}$

Pour étudier une expression du type a^b (limite, dérivée, …), il est généralement nécessaire de passer à cette forme.

Ex : Limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$.

(attention pas de passage à exp dans les équivalents !)

$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$.

2. Comparaisons de fonctions

Dans toute cette partie, x_0 désigne un réel ou $+\infty$, ou $-\infty$.

2.1 Fonction négligeable / Fonctions équivalentes

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies et non nulles sur un voisinage de x_0 :

_ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on dit que f est équivalente à g en x_0. Dans ce cas, on note $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

_ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante devant f) au voisinage de x_0. Dans ce cas, on note $f(x) =_{x_0} o(g(x))$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0.
Si $f(x) =_{x_0} g(x) + o(g(x))$ alors $f(x) \sim_{x_0} g(x)$

Comme pour les suites, la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et la puissance, mais pas avec la somme et la différence.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0.
Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ **(fini ou infini)**, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

2.2 Exemples usuels

Propriété :

$\ln(1 + x) \sim_0 x$ $\qquad$ $e^x - 1 \sim_0 x$

Corollaire

Soit u une fonction définie sur un voisinage de x_0.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ alors $e^{u(x)} - 1 \sim_{x_0} u(x)$ et $\ln(1 + u(x)) \sim_{x_0} u(x)$.

Exemple : Limite en 0 de $\frac{\ln(1 - x^2)}{2x^2}$?

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\ln(1 - x^2) \sim -x^2$ $\quad \frac{\ln(1 - x^2)}{2x^2} \sim \frac{-x^2}{2x^2} \sim -\frac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

Propriété :

En + ∞ et en - ∞, un **polynôme** est équivalent à son **monôme non nul de plus haut degré**.
En 0, un polynôme est équivalent à **son monôme non nul de plus bas degré**.

Exemples :

_ Limite en - ∞ de $\frac{2 - x^3}{x^2 + x + 1}$?

$\frac{2 - x^3}{x^2 + x + 1} \sim - \frac{x^3}{x^2} \sim - x$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = + \infty$

_ Equivalent en 0 de $x^3 + 3x^2 - 4x$?

$x^3 + 3x^2 - 4x \sim_0 - 4x$

Propriété (**Croissances comparées**) :

Soient α et β des réels strictement positifs
1) si $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ alors $\boldsymbol{x^\alpha =_{+\infty} o(x^\beta)}$
2) $\boldsymbol{x =_{+\infty} o(e^x)}$ $\boldsymbol{\ln(x) =_{+\infty} o(x)}$
3) De manière générale, $\boldsymbol{x^\alpha =_{+\infty} o(e^{\beta x})}$ $\boldsymbol{\ln^\alpha(x) =_{+\infty} o(x^\beta)}$

Exemple :

Limite en + ∞ de $f(x) = x - 2\ln^3(x)$?

$\ln^3(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f(x) \sim_{+\infty} x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = + \infty$