ECG2 : Correction D.M. n°2 niveau 1

Exercice 1 - EDHEC 2008

1) a) f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^2 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$

$$f_n''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 - (-e^x) \times 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{-e^x(1+e^x) + 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$

b) $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$\searrow$	$n - 1/4$	$\nearrow$	

Le minimum de f_n' sur $\mathbb{R}$ est $n - \dfrac{1}{4}$ qui est strictement positif (car $n \geq 1$). Donc f_n' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

2) a) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. $0 \in\ ]-\infty;+\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.

b) $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = -\dfrac{e^{-1/n}}{1+e^{-1/n}} < 0$ $\quad f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$

Donc $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) \leq f_n(u_n) \leq f_n(0)$. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 0$.

Ou : $f_n(u_n) = 0$ donc $\dfrac{1}{1+e^{un}} + nu_n = 0$ $\quad nu_n = -\dfrac{1}{1+e^{un}}$

donc $nu_n < 0$ donc $u_n < 0$ $\quad$ Comme $1 + e^{un} > 1$ $\quad \dfrac{1}{1+e^{un}} < 1$ $\quad -\dfrac{1}{1+e^{un}} > -1$ $\quad nu_n > -1$ $\quad u_n > -\dfrac{1}{n}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d) $f_n(u_n) = 0$ donc $\dfrac{1}{1+e^{un}} + nu_n = 0$ $\quad nu_n = -\dfrac{1}{1+e^{un}}$ $\quad \dfrac{u_n}{-\dfrac{1}{2n}} = \dfrac{2}{1+e^{un}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{1+e^{un}} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{-\dfrac{1}{2n}} = 1$ donc $u_n \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{2n}$

Exercice 2 - EDHEC 2012

1) a) Par récurrence : $u_0 = 0$ $\ 0 \leq 0 < 1$ donc vrai au rang 0.
Supposons qu'au rang n : $0 \leq u_n < 1$

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $0 \leq u_n^2 < 1$ $\quad 1 \leq u_n^2 + 1 < 2$ $\quad \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n^2 + 1}{2} \leq 1$

donc $0 \leq u_{n+1} < 1$.
Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.

b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.

Ou : $u_1 = \dfrac{u_0^2 + 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Montrons par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$:
_ $u_1 \geq u_0$ d'après le résultat précédent
_ supposons que $u_{n+1} \geq u_n$
Avec les mêmes opérations qu'à la question précédente : $u_{n+1}^2 \geq u_n^2$ $\quad u_{n+1}^2 + 1 \geq u_n^2 + 1$

$\frac{u_{n+1}^2 + 1}{2} \geq \frac{u_n^2 + 1}{2}$ $\quad u_{n+2} \geq u_{n+1}$

(Ou en étudiant la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$ dont la dérivée $f'(x) = 2x$, donc f est croissante sur $[0;+\infty[$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ la suite est croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un réel L.

L est un point fixe donc $L = \frac{L^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2L = L^2 + 1 \Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2 + 1}{2} = \frac{1 - u_n^2}{2}$

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{1 - u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2}{(1 - u_n)(1 + u_n)} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{(1 - u_n)(1 + u_n)} = \frac{1 - u_n}{(1 - u_n)(1 + u_n)}$$

$= \frac{1}{1 + u_n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2}$

c) D'après la propriété de l'énoncé $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{2}$

Or $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) = \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}} + \frac{1}{v_n} - \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_{n-1}}\right)$ (sommes télescopiques)

$= \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_n} - 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nv_n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{nv_n} \sim_{+\infty} \frac{1}{2}$ $\quad nv_n \sim_{+\infty} 2$ $\quad v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$

$1 - u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$ donc $u_n - 1 \sim_{+\infty} -\frac{2}{n}$.